$a\cdot\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}-2$，而根据对数平均不等式得 $\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}<\dfrac{1}{\sqrt{x_1x_2}}$，下面证明对数平均不等式成立，设 $0<x_1<x_2$，要证明 $\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}<\dfrac{1}{\sqrt{x_1x_2}}$ 成立，则只需证 $\ln x_2-\ln x_1<\dfrac{x_2-x_1}{\sqrt{x_1x_2}}$ 成立，即证 $\ln\dfrac{x_2}{x_1}<\dfrac{\dfrac{x_2}{x_1}-1}{\sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}}}$ 成立，设 $t=\sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}}>1$，即证 $\ln t^2<\dfrac{t^2-1}{t}$ 成立，即证 $\ln t^2-t+\dfrac{1}{t}<0$ 成立，构造函数 $h(t)=2\ln t+(\dfrac{1}{t}-t)(t>1)$，所以 $g'(t)=-\dfrac{(t-1)^2}{t}<0$，$h(t)$ 在 $(1，+\infty)$ 递减，所以 $h(t)<h(1)=0$，所以不等式 $\ln\dfrac{x_2}{x_1}<\dfrac{\dfrac{x_2}{x_1}-1}{\sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}}}$ 成立，所以 $\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}<\dfrac{1}{\sqrt{x_1x_2}}$ 成立，由 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{\dfrac{1}{x_1}-x_1+a\ln x_1-\dfrac{1}{x_2}+x_2-a\ln x_2}{x_1-x_2}=a\cdot\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}-2$，而 $a\cdot\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}-2<\dfrac{a}{\sqrt{x_1x_2}}-2=a-2$，所以 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$ 成立.

【点评】本题的第（1）问其实质就是导数的分类讨论的问题，对于导数的分类讨论，要把握其分类的标准. 因为在平时的备考中要树立分类讨论思想，应注重理解和掌握分类的原则、方法与技巧、做到“确定对象的全体，明确分类的标准，分层别类不重复、不遗漏的分析讨论.”往往分类讨论主要是有以下类型：①参数引起的分类讨论；②判别式引起的分类讨论；③二次函数对称轴与给定区间引起的分类讨论；④二项系数引起的分类讨论.但平时在考题中求导后多与二次函数有关，因此我们对参数进行讨论时，要注意判断求导后是否为二次函数（若二次函数系数为参数，需对二次函数系数分正、负、零等讨论），若为二次函数，则需要判断是否能因式分解，若能因式分解，则还要判断根的大小以及根是否在定义域内；若不能因式分解，则要判断开口方向、Δ、对称轴以及是否过定点和根的大小以及根是否在定义域内等，要把握住其中的关键点，这样分类讨论标准才可以把握到位、不重复、不遗漏.第（2）问中要证明不等式，其实就是懂得构造函数或者利用不等式放缩等方法来处理，而在解法 1 中和解法 2 的不同之处就是构造函数的不同，解法 1 是转化后直接构造，解法 2 是变形后构造，但都“殊途同归”，都是为了达到证明不等式的效果.而解法 3 和解法 4 时化简后利用放缩，然后证明不等式成立，不过都要用到一种常用的方法：构造函数.可见对于处理导数压轴题来说，构造一个新的函数来处理问题是常规的手法，但是构造函数一定要结合题目的特征来构造，常用的有直接构造法，等价转化构造法、消元或消参构造等，总之，是通过构造实现处理函数的问题.综合上面来看，对于函数与导数的综合题型，最为关键的是要学会求函数的单调区间，通过单调区间来解决一系列问题，因此在备考期间要注意落实求单调区间问题才是“上上之策”.

二、寻“前世今生”

于今年这道导数压轴题，其实是我们“常见”的题型，第（1）问求单调区间，是考查分类讨论的思想；第（2）问证明不等式，考查就是等价转化的思想.因此今年的这道压轴题的类型在往年压轴题和模拟试题都经常出现，特别是和 2011 年湖南高考文科数学第 22 题“高度吻合”.其实我们高考命题是从题库里面抽取出来命题的，因此我们很多题目都可以找到它的“前世今生”，今年这道高考题也不例外.下面分析对比这两道题目的“异同”.（2011 年湖南高考文科数学第 22 题）设函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}-a\ln x(a\in\mathrm{R})$，(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；(2)若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，记过点 $A(x_1，f(x_1))$，$B(x_2，f(x_2))$ 的直线的斜率为 k，是否存在 a，使得 $k=2-a$？若存在，求出 a 的值；若不存在，请说明理由.仔细分析可知：这两道题可以说是“一模一样”的：①题目给出的函数几乎一样，仅相差了一个符号而已；②第（1）问都是讨论函数的单调性，问法一样；③ 第（2）问研究的问题完全一样，只不过换一种说法而已.在 2011 年这道高考题中，设问用了探索的方式，问是否存在 a，使得 $k=2-a$，而今年的高考题是要求证明：$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$，而 $k=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$；④解题思路方法也一样，由上面的解答不难得出原型（2011 年湖南卷）第（2）问的答案，由于题目给出来的函数是今年高考题的相反数，则其图像是关于 y 轴对称，所以原型题中的 k 与上面解答中的 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ 是互为相反数，故 $k=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>2-a$，从而不存在常数 a，使得 $k=2-a$.从中可发现：对于这些类型其实处理方法本质一样，只不过稍微“改头换面”，因此我们在备考的过程中要学会不断反思，要认真研究题目的“来龙去脉”，寻找它的“前世今生”，这样备考才可以更好的有的放矢.

例 1. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-ax+(a-1)\ln x$，$a>1$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明：若 $a<5$，则对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-1$.

【分析】本题主要考查分类讨论的思想和不等式证明，要解决该类题型和上面的手法“如出一辙”，只要把握分类讨论和构造函数的常规方法，就很容易找到解题的“突破口”.

解析：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

$f'(x)=x-a+\dfrac{a-1}{x}=\dfrac{x^2-ax+a-1}{x}=\dfrac{(x-1)(x+1-a)}{x}$，(i)若 $a-1=1$ 即 $a=2$，则 $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x}$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增加.(ii)若 $a-1<1$，而 $a>1$，故 $1<a<2$，则当 $x\in(a-1,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(0,a-1)$ 及 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$. 故 $f(x)$ 在 $(a-1,1)$ 单调递减，在 $(0,a-1)$，$(1,+\infty)$ 单调递增.(iii)若 $a-1>1$，即 $a>2$，同理可得 $f(x)$ 在 $(1,a-1)$ 单调递减，在 $(0,1)$，$(a-1,+\infty)$ 单调递增.